

Une approche PnP distribuée pour l'échantillonnage de problèmes inverses en grande dimension

Maxime Bouton*, P.-A. Thouvenin*, A. Repetti†‡ et P. Chainais*

*Université de Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9189 CRISTAL, F-59000 Lille, France

†School of Mathematical and Computer Sciences, Heriot-Watt University, Edinburgh EH14 4AS, UK

‡Maxwell Institute for Mathematical Sciences, Edinburgh EH8 9BT, UK

1. Contexte et enjeux

Problèmes inverses : estimer $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ à partir d'observations $y \in \mathbb{R}^M$

$$y = \mathcal{A}(H\bar{x}) \rightsquigarrow \pi(x | y) \propto \exp(-\phi_y(Hx)) p(x)$$

$H, \mathcal{A}$ modèles d'acquisition et de bruit
avec ϕ_y attache aux données
 p *a priori* sur x

Mesure d'incertitude $\Rightarrow$ Monte-Carlo par Chaînes de Markov (**MCMC**)

Qualité d'estimation $\Rightarrow$ *a priori* appris, encodé par un **réseau de neurones**

Problèmes de très grandes dimensions ($M \approx N > 10^6$)

$\Rightarrow$ **implémentation distribuée** (architecture *SPMD*) [1]:

⊕ décomposer le problème sur B agents

⚠ limiter les **communications**

2. Approche proposée

Basée sur **PnP-ULA** [2] :

$$z^{(t+1)} \sim \mathcal{N}(0, I_N)$$

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \delta H^* \nabla \phi_y(Hx^{(t)}) + \sqrt{2\delta} z^{(t+1)} \\ + \frac{\alpha\delta}{\epsilon} (D_\epsilon(x^{(t)}) - x^{(t)}) + \frac{\delta}{\lambda} (\Pi_{\mathcal{C}}(x^{(t)}) - x^{(t)}),$$

avec D_ϵ débruiteur (profond) gaussien, variance ϵ
 $\Pi_{\mathcal{C}}$ projecteur sur $\mathcal{C}$

Propriété: f *local* $\Leftrightarrow [f(x)]_i = \tilde{f}_i(x_{[i]}), \quad x_{[i]}$: éléments voisins

Hypothèses :

- ϕ_y **additivement séparable** $\rightsquigarrow (y_b)_{1 \leq b \leq B} \perp\!\!\!\perp x$
- $\nabla \phi_y, \Pi_{\mathcal{C}}$ et D_ϵ **locaux** $\rightsquigarrow (x_b)_{1 \leq b \leq B} +$ communications **limitées**

Choix de D_ϵ : Deep Dual Forward-Backward [3]

- Convolutions $\Rightarrow$ Local ✓
- Peu de couches $\Rightarrow$ Communications ↘

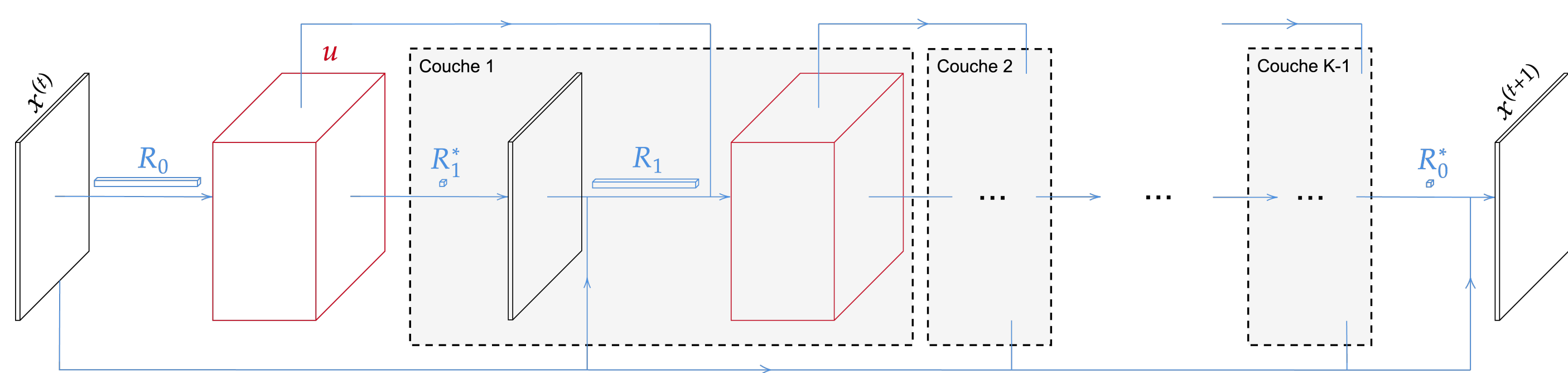
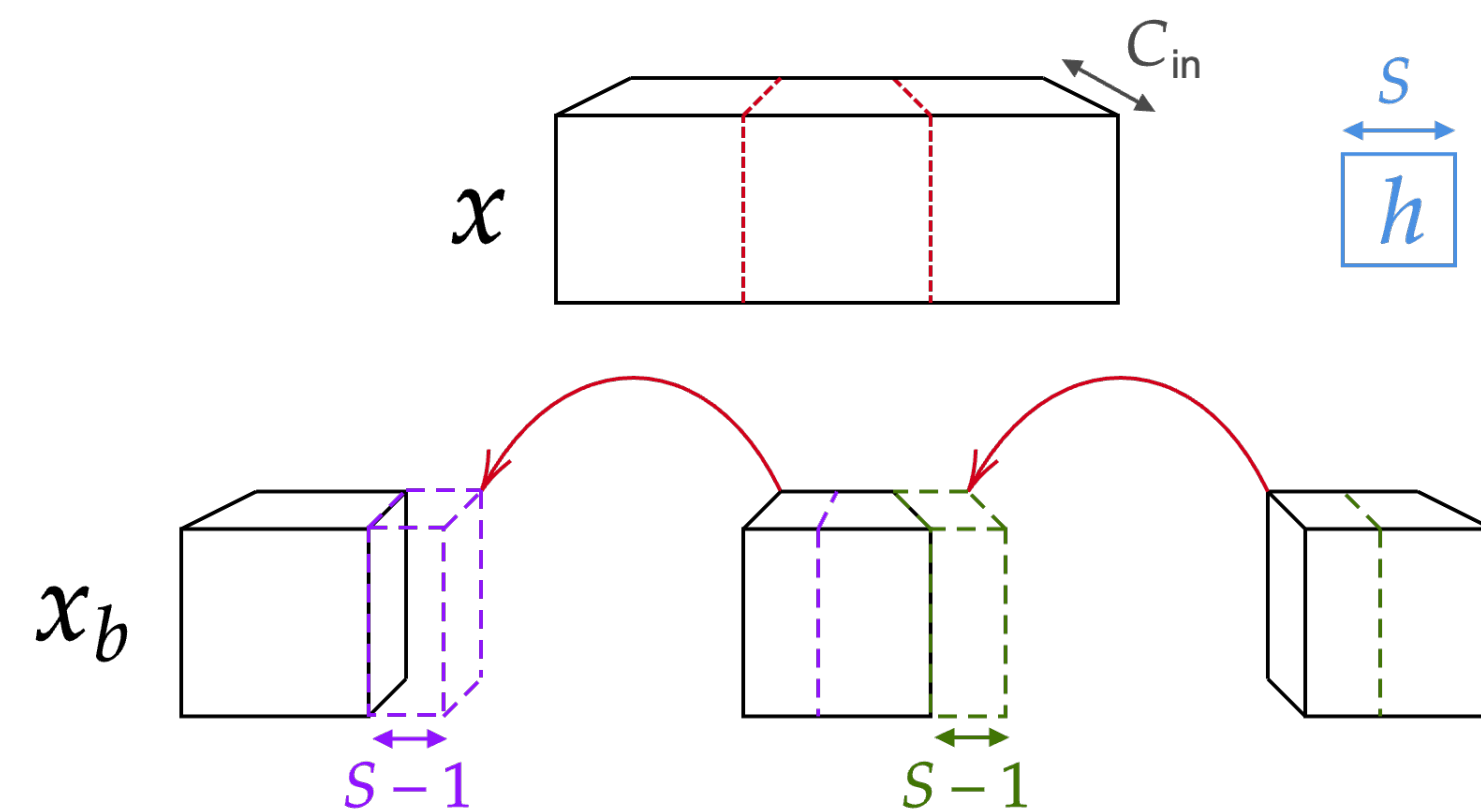


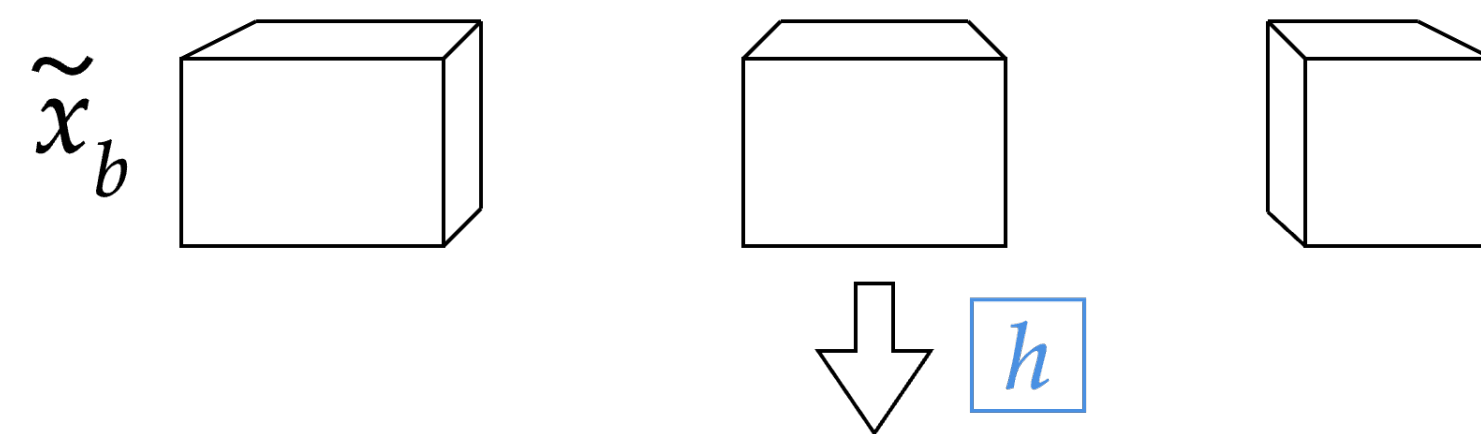
Figure 1: Structure du DDFB

Distribuer une convolution du DDFB :

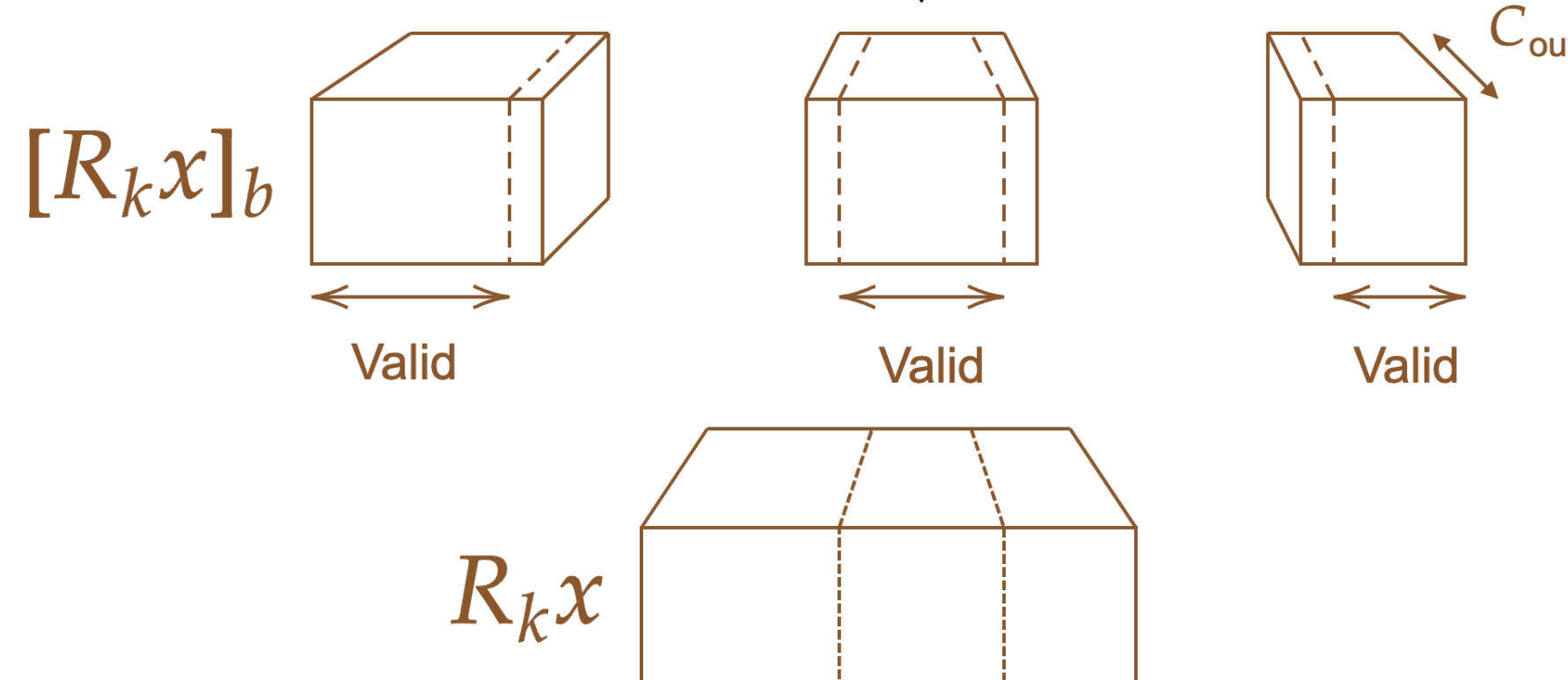
1 Communications



2 Application de l'opérateur



3 Gestion effets de bord



3. Algorithme distribué proposé

Entrées: $y \in \mathbb{R}^M, \epsilon > 0, \alpha > 0, \lambda, \delta$

```
1 Pour chaque agent  $b \in \{1, \dots, B\}$  faire en parallèle
2   Charger et stocker  $y_b \in \mathbb{R}^{M_b}$ 
3   Initialiser  $x_b^{(0)} \in \mathbb{R}^{N_b}$ 
4   Pour  $t = 0$  à  $T - 1$  faire
5     // Communiquer à chaque couche du DDFB pour calculer
      $d_b^{(t)} = [D_\epsilon(x^{(t)})]_b$ 
6     // Mise à jour locale
      $g_b^{(t)} = \frac{1}{\sigma^2} H_b^* (H_b x_b^{(t)} - y_b)$ 
7     Tirer  $z_b^{(t+1)} \sim \mathcal{N}(0, I_{N_b})$ 
8      $x_b^{(t+1)} = x_b^{(t)} - \delta g_b^{(t)} + \frac{\alpha\delta}{\epsilon} (d_b^{(t)} - x_b^{(t)})$ 
       +  $\frac{\delta}{\lambda} (\Pi_{\mathcal{C}_b}(x_b^{(t)}) - x_b^{(t)}) + \sqrt{2\delta} z_b^{(t+1)}$ 
```

Sorties: $(x^{(t)})_{1 \leq t \leq T}$

4. Expériences sur données synthétiques

Application: **inpainting** image couleur **80%**, bruit gaussien $\sigma = 0.03$

Comparaison: PnP-FB utilisant DRUNet (séquentiel)



Figure 2: Ligne 1: Observations, vérité terrain, initialisation. Ligne 2: MAP (PnP-FB), MMSE (DPnP-ULA, $B = 4$) et intervalle de crédibilité associé.

B	Temps / iter (ms)	Accélération	rSNR	SSIM
1	199 ± 0.32	1	16.29	0.78
2	137 ± 0.45	1.45	16.33	0.78
4	105 ± 0.94	1.90	16.30	0.78

Table 1: Scalabilité forte

5. Conclusions

Échantillonneur PnP-ULA distribué

- $\rightarrow$ conservation des garanties théoriques;
- $\rightarrow$ implémentation multi-GPU;
- $\rightarrow$ passage à l'échelle;
- $\rightarrow$ contraintes sur le débruiteur;

- P.-A. Thouvenin, A. Repetti, and P. Chainais, "A distributed split-Gibbs sampler with hypergraph structure for high-dimensional inverse problems," *J. Comput. and Graph. Stat.*, vol. 33, no. 3, pp. 814–832, 2024.
- R. Laumont et al., "Bayesian imaging using Plug & Play priors: When Langevin meets Tweedie," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 15, no. 2, pp. 701–737, 2022. arXiv: 2103.04715 [cs, eess, math, stat].
- H. T. V. Le, A. Repetti, and N. Pustelnik, "Unfolded Proximal Neural Networks for Robust Image Gaussian Denoising," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 33, pp. 4475–4487, 2024.